

422 ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ Ι
ΙΟΥΝΙΟΣ 2016
ΤΜΗΜΑ Α

1) Στο σύνολο \mathbb{Z}^2 ορίζουμε τη σχέση $(a, b) \sim (c, d)$ αν $2a - b = 2c - d$. Δείξτε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας. Μπορείτε να περιγράψετε τις κλάσεις ισοδυναμίας; (1)

2) Να βρεθούν όλες οι μη-ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης 300. (1)

3) α) Βρείτε όλες τις κανονικές υποομάδες της Σ_3 . (0.5)

β) Αν H και K είναι υποομάδες της O με τάξεις πρώτες μεταξύ τους, να δείξετε ότι $H \cap K = \{1\}$. (0.5)

γ) Βρείτε όλες τις υποομάδες της $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. (0.5)

δ) Βρείτε τα σύμπλοκα στην $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ως προς την υποομάδα $Y = \{(0, 0), (0, 2)\}$. (0.5)

4) Δίνεται η απεικόνιση $\phi : \Sigma_3 \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$ με τύπο $\phi(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, και

$\phi(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Δείξτε ότι είναι μονομορφισμός ομάδων. (1)

5) Έστω οι μεταθέσεις $\sigma = (2, 3)$, $\tau = (2, 3, 4, 5, 6)$ και $\rho = (1, 4, 6, 3)$. Να βρεθούν οι τάξεις των στοιχείων $\sigma\rho$, $\sigma\rho^2$ και $\rho^{-1}\tau^{22}$ και αν είναι άρτιες ή περιττές. (1)

6) Βρείτε όλες τις μονάδες, μηδενοδιαίρετες και μηδενοδύναμα στοιχεία επίσης όλα τα μέγιστα και πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ με τις συνηθισμένες πράξεις. (1)

7) α) Εξετάστε αν $2\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}$ σαν ομάδες και σαν δακτύλιοι. (0.5)

β) Βρείτε όλους τους ενδομορφισμούς ομάδων και δακτυλίων του \mathbb{Z} . (1)

8) α) Εξετάστε αν το πολυώνυμο $x^4 + 1$ είναι ανάγωγο στους δακτυλίους $\mathbb{Q}[x]$ και $\mathbb{R}[x]$. (1)

β) Εξετάστε αν το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + 1$ είναι ανάγωγο στο δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$. Αν I είναι το ιδεώδες που γεννάται από το $f(x)$, περιγράψτε πλήρως το δακτύλιο $\mathbb{R}[x]/I$. (1)